FRACTIONS RATIONNELLES

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Décomposer les fractions rationnelles qui suivent en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$.

$$f_1(x) = \frac{(3x+2)^3}{x^2-4} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^6(1-x)^3} \qquad f_3(x) = \frac{x^6+2x^2-1}{x^2(x^2+4)(x^2-1)^3}$$

$$f_4(x) = \frac{7x}{(x-1)^4(x^2+2x+4)} \qquad f_5(x) = \frac{3x^3+2x^2-4x+1}{(x-2)(x^2+x+1)^2}$$

• **1)** $f_1(x) = \dfrac{(3x+2)^3}{x^2-4} = E(x) + \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-2}$

* En multipliant les 2 membres par $x+2$ (resp. $(x-2)$) et en faisant $x=-2$ (resp. $x=2$) on obtient $a=16$ et $b=128$

* Partie entière $E(x)$? On la détermine soit par division euclidienne de $(3x+2)^3$ par x^2-4, soit en faisant $E(x)=\alpha x+\beta$ et en remarquant que : - si l'on divise les 2 membres par x et si $x \to +\infty$, on obtient $\alpha = 27$. - Si $x=0$, alors $-2 = \beta + \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ d'où $\beta = 54$.

Conclusion : $\boxed{\dfrac{(3x+2)^3}{x^2-4} = 27x + 54 + \dfrac{16}{x+2} + \dfrac{128}{x-2}}$

• **2)** La division de 1 par $(1-x)^3$ suivant les puissances croissantes de x donnent :

$$1 = (1-x)^3(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5) + x^6R(x)$$

d'où : $$\frac{1}{x^6(1-x^3)} = \frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^5} + \frac{6}{x^4} + \frac{10}{x^3} + \frac{15}{x^2} + \frac{21}{x} + \underbrace{\frac{R(x)}{(1-x)^3}}$$

fract. rat. sans le pôle 0.

On recommence avec le pôle $x=1$ en posant $y=1-x$:

$f_2(x) = \dfrac{1}{y^3(1-y)^6}$ 1 doit être divisé ouis. les p. croiss. de y par $(1-y)^6$ à l'ordre 2. Donc $(1-y)^6 = 1-6y+15y^2+\dots$ suffit.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-6y+15y^2+\dots \\ \hline 1-6y+15y^2 & 1+6y+21y^2 \\ \hline 6y-15y^2+\dots & \\ 6y-36y^2+\dots & \\ \hline 21y^2+\dots & \\ \dots & \end{array}$$

montre que la partie de la décomposition relative au pôle 1 sera : $\dfrac{1}{y^3} + \dfrac{6}{y^2} + \dfrac{21}{y}$ où $y=1-x$.

Ccl :

$$\boxed{f_2(x) = \frac{1}{x^6(1-x)^3} = \frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^5} + \frac{6}{x^4} + \frac{10}{x^3} + \frac{15}{x^2} + \frac{21}{x} + \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{6}{(1-x)^2} + \frac{21}{1-x}}$$

• 3) $f_3(x) = \dfrac{x^6+2x^2-1}{x^2(x^2+4)(x^2-1)^3} = \dfrac{a_1}{x^2} + \dfrac{a_2}{x} + \dfrac{a_3}{x-2i} + \dfrac{a_4}{x+2i} + \dfrac{a_5}{(x-1)^3} + \dfrac{a_6}{(x-1)^2} + \dfrac{a_7}{x-1} + \dfrac{a_8}{(x+1)^3} + \dfrac{a_9}{(x+1)^2} + \dfrac{a_{10}}{x+1}$ (1)

est paire, donc : $f_3(x) = \dfrac{a_1}{x^2} - \dfrac{a_2}{x} - \dfrac{a_3}{x+2i} - \dfrac{a_4}{x-2i} - \dfrac{a_5}{(x+1)^3} + \dfrac{a_6}{(x+1)^2} - \dfrac{a_7}{x+1} - \dfrac{a_8}{(x-1)^3} + \dfrac{a_9}{(x-1)^2} - \dfrac{a_{10}}{x-1}$

d'où, par identification : $a_2 = 0$, $a_3 = -a_4$, $a_5 = -a_8$, $a_6 = a_9$ et $a_7 = -a_{10}$

* En multipliant (1) par $x-2i$ (resp. x^2) et en faisant $x = 2i$ (resp. $x = 0$), on obtient :

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{73i}{2000}$$

* On détermine a_5, a_6 et a_7 en divisant $(1+y)^6 + 2(1+y)^2 - 1 = 2 + 10y + 17y^2 + \dots$

par $(1+y)^2\big((1+y)^2+4\big)(y+2)^3 = (1+y)^2(5+2y+y^2)(8+12y+6y^2+\dots) = 40 + 156y + 254y^2 + \dots$

suivant les puissances croissantes de $y = x-1$, à l'ordre 2 :

On trouve :

$$\begin{array}{l|l} 2 + 10y + 17y^2 + \dots & 40 + 156y + 254y^2 + \dots \\ \hline 2 + \frac{39}{5}y + \frac{127}{10}y^2 + \dots & \frac{1}{20} + \frac{11}{200}y - \frac{107}{1000}y^2 \\ \hline \frac{11}{5}y + \frac{43}{10}y^2 + \dots & \\ \frac{11}{5}y + \frac{858}{100}y^2 + \dots & \\ \hline -\frac{428}{100}y^2 + \dots & \end{array}$$

d'où $a_5 = \dfrac{1}{20}$ $a_6 = \dfrac{11}{200}$ et $a_7 = -\dfrac{107}{100}$

Conclusion :

$$\frac{x^6+2x^2-1}{x^2(x^2+4)(x^2-1)^3} = \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \underbrace{\frac{\frac{73i}{2000}}{x-2i} + \frac{\frac{-73i}{2000}}{x+2i}}_{= \frac{\frac{-146}{1000}}{x^2+4} = \frac{\frac{-73}{500}}{x^2+4}} + \frac{\frac{1}{20}}{(x-1)^3} + \frac{\frac{11}{200}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{107}{100}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{20}}{(x+1)^3} + \frac{\frac{11}{200}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{107}{100}}{x+1}$$

pour la décomposition réelle.

• 4) Posons $y = x-1$ et divisons $7x = 7 + 7y$ par $x^2+2x+4 = 7 + 4y + y^2$ suiv. les puiss. croiss. de y à l'ordre 3 : on obtient $7+7y = (7+4y+y^2)\left(1 + \frac{3}{7}y - \frac{19}{49}y^2 + \frac{55}{343}y^3\right) + y^4 R(y)$ d'où

$$\frac{7x}{(x-1)^4(x^2+2x+4)} = \frac{1}{(x-1)^4} + \frac{3}{7(x-1)^3} - \frac{19}{49(x-1)^2} + \frac{55}{343(x-1)} + \frac{ax+b}{x^2+2x+4}$$

Terme de 2ème espèce : On peut trouver la déc. en él. simple dans $\mathbb{C}$, puis regrouper les termes en $\frac{1}{x-\alpha}$ et $\frac{1}{x-\bar{\alpha}}$ où $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ est une racine de x^2+2x+4. On peut aussi :

* Multiplier les 2 membres par x et faire tendre $x \to +\infty$: $a + \frac{55}{343} = 0 \Rightarrow a = -\frac{55}{343}$

* Faire $x = 0$: $0 = 1 - \frac{3}{7} - \frac{19}{49} - \frac{55}{343} + \frac{b}{4} \Rightarrow b = -\frac{32}{343}$.

• 5) $f_5(x) = \dfrac{3x^3+2x^2-4x+1}{(x-2)(x^2+x+1)^2} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{bx+c}{(x^2+x+1)^2} + \dfrac{dx+e}{x^2+x+1}$

* En multipliant les 2 membres par $x-2$ (resp. $(x^2+x+1)^2$) puis en faisant $x = 2$ (resp. $x = j$) on obtient : $a = \dfrac{25}{49}$ et $bj + c = \dfrac{3+2j^2-4j+1}{j-2} \Rightarrow (c-3b)j - b - 2c = -6j + 2$

d'où $b = \frac{10}{7}$ et $c = -\frac{12}{7}$. * En multipliant les 2 membres par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on a : $0 = a + d \Rightarrow d = -\frac{25}{49}$. * Enfin, si $x = 0$, $-\frac{1}{2} = -\frac{a}{2} + c + e \Rightarrow e = \frac{72}{49}$.

Ccl :

$$\frac{3x^2+2x^2-4x+1}{(x-2)(x^2+x+1)^2} = \frac{25}{49(x-2)} + \frac{1}{7}\cdot\frac{10x-12}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{49}\cdot\frac{-25x+72}{x^2+x+1}$$

① Calculer $\int \frac{1}{x^3-1}$.

---

① $\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$

* En multipliant les 2 membres par $x-1$ et en faisant $x=1$, on obtient $a = \frac{1}{3}$.
* En " " par x et en faisant $x \to +\infty$, on obtient : $0 = \frac{1}{3} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$
* Si $x=0$, on déduit $-1 = -a + c \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$.

Ainsi $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1}$ que l'on peut intégrer sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\int \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}$$

et $\int \frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + 2\int \frac{1}{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\ \mathrm{Arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + \text{cte}$$

Ccl : $\int \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \text{cte}$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \text{cte}}$$

(J'ai vérifié en dérivant)

Ex : Décomposer $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2}$ en éléments simples

---

$f(x) = \dfrac{P}{(x-1)^2 Q}$ et si $X = x-1$, on a : $\begin{cases} P = X^2+4X+2 \\ Q = X^4+2X^3+3X^2+2X+1 \end{cases}$

Par div. suiv. les puiss. croissantes de X : $P = 2Q + X^2(-5-4X-2X^2)$

d'où $f = \dfrac{P}{X^2Q} = \dfrac{2}{X^2} + \underbrace{\dfrac{-5-4X-2X^2}{Q}}_{\text{sans pôle 1}}$

Ainsi $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{ax+b}{(x^2-x+1)^2} + \dfrac{cx+d}{x^2-x+1}$ (1)

* Recherche de a et b : En multipliant les 2 membres de (1) par $(x^2-x+1)^2$ et en faisant $x = \alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, on obtient :

$$\frac{\alpha^2+2\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = a\alpha+b \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$$

* Recherche de c et d : $f + \dfrac{2x+1}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{2x}{(x-1)^2(x^2-x+1)}$ n'admet les pôles α et $\bar{\alpha}$ qu'à l'ordre 1. On détermine c et d comme ci-dessus :

$$\frac{2\alpha}{(\alpha-1)^2} = c\alpha+d \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=-2 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2} - \frac{2}{x^2-x+1}$$ (vérifié !)

Calculer $\int \frac{1}{(x-2)^2(x^2+x+1)}\,dx$

$F = \frac{1}{(x-2)^2(x^2+x+1)} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$

* Posons $x-2=t$. Alors $x^2+x+1 = t^2+5t+7$ et $F = \frac{1}{t^2(7+5t+t^2)}$

Par division suivant les puissances croissantes de t à l'ordre 1 :

$$1 = (7+5t+t^2)\left(\frac{1}{7} - \frac{5}{49}t\right) + \frac{18}{49}t^2$$

d'où $F = \frac{1}{7t^2} - \frac{5}{49t} + \frac{18}{49(7+5t+t^2)}$ et $\begin{cases} a = \frac{1}{7} \\ b = -\frac{5}{49} \end{cases}$

* Si $x=0$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{28} + \frac{5}{98} + d \Rightarrow d = \frac{8}{49}$

* Si $x \to +\infty$, on obtient $0 = b + c \Rightarrow c = \frac{5}{49}$ (après avoir multiplié les 2 membres par x)

Conclusion : $F(x) = \frac{1}{7(x-2)^2} - \frac{5}{49(x-2)} + \frac{\frac{5}{49}x + \frac{8}{49}}{x^2+x+1}$

* $\int F(x) = -\frac{1}{7(x-1)} - \frac{5}{49}\ln|x-2| + \frac{5}{49}\int \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{8}{49}\int \frac{1}{x^2+x+1}$

On a : $\int \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}$

d'où

$$\int F(x) = -\frac{1}{7(x-1)} - \frac{5}{49}\ln|x-2| + \frac{5}{98}\ln(x^2+x+1) + \frac{11}{98}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

* Calcul de $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$: On a $x^2+x+1 = \frac{3}{4}(t^2+1)$ où $t = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$,

d'où $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Arctg}\,t$

* Conclusion :

$$\boxed{\int F(x) = -\frac{1}{7(x-1)} - \frac{5}{49}\ln|x-2| + \frac{5}{98}\ln(x^2+x+1) + \frac{11\sqrt{3}}{147}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \; \frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

$$(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k \left(i^k - (-i)^k\right) x^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k i^k \underbrace{\left(1 + (-1)^{k+1}\right)}_{\text{s'annule ssi } k \text{ est pair}} x^{n+1-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2l+1} i^{2l+1} \cdot 2 \cdot x^{n-2l}$$

d'où $$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \sum_{l=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2l+1} (-1)^l x^{n-2l}$$

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$:

a) $\dfrac{x^3+2x^2+5x-1}{x^2-9}$ b) $\dfrac{x+5}{x^3(x-1)}$ c) $\dfrac{x^4+1}{(x^2-1)^3}$

---

a) Par division euclidienne : $x^3+2x^2+5x-1 = (x^2-9)(x+2)+14x+17$

et : $\dfrac{x^3+2x^2+5x-1}{x^2-9} = x+2+\dfrac{14x+17}{x^2-9} = x+2+\dfrac{\frac{59}{6}}{x-3}+\dfrac{\frac{25}{6}}{x+3}$

b) $\dfrac{x+5}{x^3(x-1)} = \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x^3}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x}$

* En multipliant les 2 membres par $x-1$ et en faisant $x=1$, on trouve $a=6$.
* Divisons $x+5$ par $x-1$ suivant les puissances croissantes de x à l'ordre 2 :

$$(5+x) = (-1+x)(-5-6x-6x^2)+6x^3$$

d'où $\boxed{\dfrac{x+5}{x^3(x-1)} = -\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{x-1}}$ et on retrouve aussi la partie polaire relative au pole 1.

c) $\dfrac{x^4+1}{(x^2-1)^3} = f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{(x+1)^3}+\dfrac{e}{(x+1)^2}+\dfrac{f}{x+1}$

Comme f est paire, $f(-x)=f(x)$ soit :

$$f(x) = -\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+1)^2}-\frac{c}{x+1}-\frac{d}{(x-1)^3}+\frac{e}{(x-1)^2}-\frac{f}{x-1}$$

et d'après l'unicité de la déc. en él. simples :

$$\begin{cases} a=-d \\ b=e \\ c=-f \end{cases}$$

Tout revient à déterminer a,b,c : on pose $t=x-1$ et on divise $x^4+1 = (t+1)^4+1 = t^4+4t^3+6t^2+4t+2$ par $(x+1)^3 = (t+2)^3 = t^3+6t^2+12t+8$ à l'ordre 2.

$$\begin{array}{l|l} 2+4t+6t^2+4t^3+t^4 & 8+12t+6t^2+t^3 \\ \hline 2+3t+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{4}t^3 & \frac{1}{4}+\frac{1}{8}t+\frac{3}{8}t^2 \\ \hline t+\frac{9}{2}t^2+\dots & \\ t+\frac{3}{2}t^2+\dots & \\ \hline 3t^2+\dots & \\ \dots & \end{array}$$

d'où $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{8} \\ c=\frac{3}{8} \end{cases}$ puis $\begin{cases} d=-\frac{1}{4} \\ e=\frac{1}{8} \\ f=-\frac{3}{8} \end{cases}$

Exercice : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle :

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^2-3X+4}{(X-1)^4(X^2+X+1)^2}$$

Solution :

* Le chgt de variable $Y = X-1$ donne $\frac{P}{Q} = \frac{Y^2-Y+2}{Y^4(Y^4+6Y^3+15Y^2+18Y+9)}$

Par division suivant les puissances croissantes de Y à l'ordre 3, on obtient :

$$2-Y+Y^2 = (9+18Y+15Y^2+6Y^3+Y^4)\left(\frac{2}{9}-\frac{5}{9}Y+\frac{23}{27}Y^2-\frac{25}{27}Y^3\right)+Y^4.R(Y)$$

d'où la décomposition :

$$\frac{P}{Q} = \frac{2}{9(X-1)^4} - \frac{5}{9(X-1)^3} + \frac{23}{27(X-1)^2} - \frac{25}{27(X-1)} + \frac{\alpha X+\beta}{(X^2+X+1)^2} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2+X+1} \qquad (1)$$

* On multiplie les 2 membres par $(X^2+X+1)^2$ et on fait $X = j$. On obtient :

$$\frac{j^2-3j+4}{(j-1)^4} = \alpha j+\beta \Rightarrow \frac{4+7j}{9} = \alpha j+\beta \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = \frac{7}{9} \\ \beta = \frac{4}{9} \end{cases}}$$

car $(1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$.

* Multiplions (1) par X, puis faisons tendre $X \to +\infty$. On obtient :

$$0 = -\frac{25}{27} + \gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{25}{27}}$$

* Faisons $X = 0$ dans (1). On obtient :

$$4 = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{23}{27} + \frac{25}{27} + \frac{4}{9} + \delta \Rightarrow \boxed{\delta = 1}$$

Exercice :

Décomposer $\frac{16}{x^3(x^2-4)}$ en éléments simples.

Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{A} \frac{16}{x^3(x^2-4)}\,dx$ où $A \in]0,2[$.

$F(x) = \frac{16}{x^3(x^2-4)}$ est impaire. Décomposons la en éléments simples :

$$F(x) = \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

$$-F(-x) = \frac{a_3}{x^3} - \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2}$$

d'où $\underline{a_2 = 0 \text{ et } b = c}$

* En multipliant par x^3 et en faisant $x = 0$: $\underline{a_3 = -4}$
* En " par $(x-2)$ et en faisant $x = 2$: $\underline{b = \frac{1}{2} = c}$
* En multipliant par x et en faisant tendre $x \to +\infty$:

$$0 = a_1 + b + c \Rightarrow a_1 = -1$$

Ainsi :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{A} F(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{A} -\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{x^2} - \ln x + \frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{\ln(x+2)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{A}$$

$$= \frac{2}{A^2} - \ln A + \frac{1}{2}\left(\ln(2-A) + \ln(A+2)\right) + \frac{1}{2}(\ln 3 + \ln 5) - 8$$